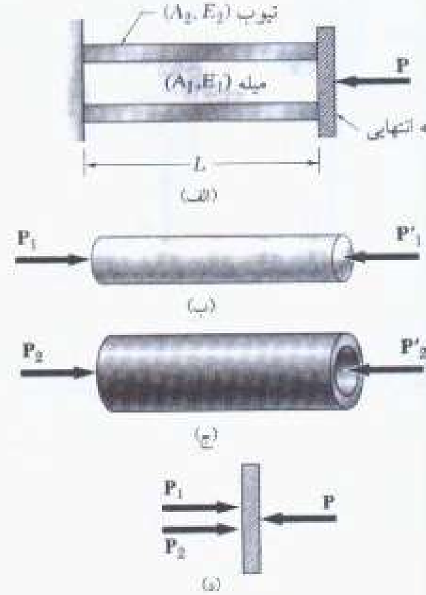
۲-۹ مسائل نامعین استاتیکی

در قسمت‌های قبل، برای تعیین نیروهای داخلی در قسمت‌های مختلف یک عضو، نمودارهای آزاد هر قسمت را رسم کرده، و معادله‌های تعادل را نوشتیم. سپس، برای تعیین تغییر طول آن عضو، نیروهای داخلی حاصله را در معادله (۲-۸) یا (۲-۹) قرار دادیم.

در بسیاری از مسائل، نیروهای داخلی (و همچنین نیروهای واکنش خارجی) را صرفاً نمی‌توان با استفاده از اصول استاتیک به‌دست آورد. برای حل این مسائل، که آنها را مسائل **نامعین استاتیکی** می‌گویند، اصول استاتیکی را همراه با روابط **تغییر شکل**[1] باید به کار برد. در زیر، چند مسئله نامعین استاتیکی بررسی شده است.

مثال ۲-۲

میله‌ای به طول L، مقطع عرضی A_1 و مدول الاستیسیتهٔ E_1 در داخل یک تیوب به طول L، مقطع عرضی A_2 و مدول الاستیسیتهٔ E_2 قرار دارد (شکل ۲-۲۵ الف). صفحه انتهایی این مجموعه، تحت نیروی **P** قرار دارد. تغییر طول میله و تیوب را بیابید.



شکل ۲-۲۵

حل: نیروی محوری داخلی در میله و تیوب را، به‌ترتیب، با P_1 و P_2 نشان می‌دهیم. نمودار آزاد میله، تیوب و صفحه انتهایی را رسم می‌کنیم (شکل‌های ۲-۲۵ب، ج و د). معادله تعادل برای نمودار آزاد در شکل ۲-۲۵د را می‌نویسیم:

$$P_1 + P_2 = P \qquad (۲-۱۱)$$

بدیهی است با این معادله نمی‌توان دو مجهول P_1 و P_2 را به‌دست آورد. بنابراین، با یک مسئله نامعین استاتیکی مواجه هستیم.

اکنون، تغییر طول میله و تیوب را، به‌ترتیب، با δ_1 و δ_2 نشان می‌دهیم. طبق معادلهٔ (۲-۷)،

$$\delta_1 = \frac{P_1 L}{A_1 E_1} \quad , \quad \delta_2 = \frac{P_2 L}{A_2 E_2} \qquad (۲-۱۲)$$

با توجه به وضعیت هندسی سیستم، $\delta_1 = \delta_2$. بنابراین،

$$\frac{P_1}{A_1 E_1} = \frac{P_2}{A_2 E_2} \qquad (۲-۱۳)$$

از حل معادله‌های (۲-۱۱) و (۲-۱۳)، نتیجه می‌شود:

$$P_1 = \frac{A_1 E_1 P}{A_1 E_1 + A_2 E_2} \quad , \quad P_2 = \frac{A_2 E_2 P}{A_1 E_1 + A_2 E_2}$$

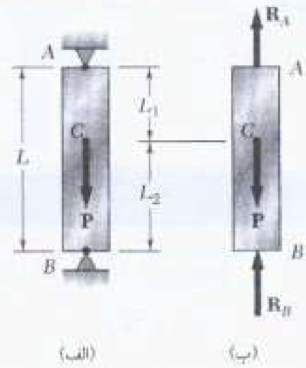
با استفاده از معادله (۲-۱۲)، تغییر طول میله و تیوب به‌دست می‌آیند.

---

[1] - روابط تغییر شکل، با استفاده از شکل هندسی سازه به‌دست می‌آیند.

مثال ۲-۳

برای میله AB در شکل ۲-۲۶ الف، تنش در قسمت‌های AC و BC را بیابید.



شکل ۲-۲۶

حل: نمودار آزاد میله AB را رسم می‌کنیم (شکل ۲-۲۶ب)، و معادلهٔ تعادل را برای آن می‌نویسیم:

$$R_A+R_B=P \qquad (۲-۱۴)$$

بدیهی است با این معادله نمی‌توان دو واکنش مجهول R_A و R_B را تعیین کرد. بنابراین، با یک مسئله نامعین استاتیکی مواجه هستیم.

اکنون تغییر طول قسمت‌های AC و BC را، به‌ترتیب، با δ_1 و δ_2 نشان می‌دهیم. با توجه به وضعیت هندسی میله AB می‌نویسیم:

$$\delta=\delta_1+\delta_2=0$$

در نتیجه،

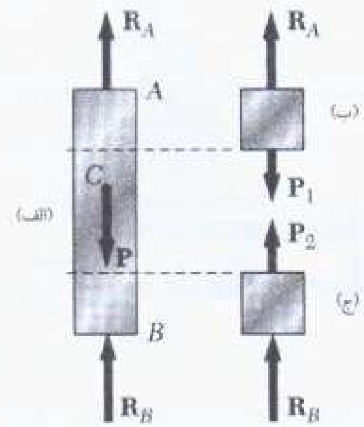
$$\delta=\frac{P_1L_1}{AE}+\frac{P_2L_2}{AE}=0 \qquad (۲-۱۵)$$

با توجه به نمودارهای آزاد در شکل‌های ۲-۲۷ب و ج، $P_1=R_A$ و $P_2=-R_B$. با توجه به معادلهٔ (۲-۱۵)،

$$R_AL_1-R_BL_2=0 \qquad (۲-۱۶)$$

از حل معادله‌های (۲-۱۴) و (۲-۱۶)، نتیجه می‌شود:

$$R_A=PL_2/L \quad , \quad R_B=PL_1/L$$



شکل ۲-۲۷

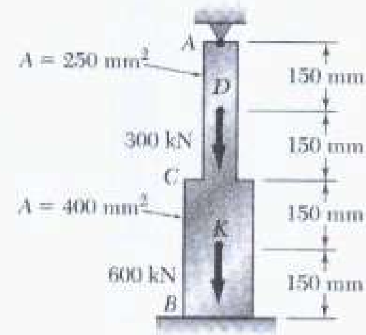
برای تعیین تنش σ_1 در قسمت AC و تنش σ_2 در قسمت BC، می‌نویسیم:

$$\sigma_1=\frac{PL_2}{AL} \quad , \quad \sigma_2=-\frac{PL_1}{AL}$$

◀

مثال ۲-۴

برای میله مرکب فولادی در شکل ۲-۲۸، واکنش در تکیه‌گاه‌های A و B را بیابید.



شکل ۲-۲۸

حل: واکنش در تکیه‌گاه B را به عنوان بار زائد درنظر گرفته، و تکیه‌گاه B را حذف می‌کنیم (شکل ۲-۲۹ الف). تغییر طول ناشی از بارهای داده شده و ناشی از واکنش زائد $\mathbf{R}_B$ را، به‌ترتیب، با σ_L و σ_R نشان می‌دهیم (شکل‌های ۲-۲۹ ب و ج).

اکنون، طبق شکل ۲-۳۰، میله را به چهار قسمت تقسیم می‌کنیم. با استفاده از روش به کار رفته در مثال ۲-۱۰، می‌نویسیم:

$$P_۱ = ۰ \quad , \quad P_۲ = P_۳ = ۶۰۰ \times ۱۰^۳ \mathrm{N} \quad , \quad P_۴ = ۹۰۰ \times ۱۰^۳ \mathrm{N}$$

$$A_۱ = A_۲ = ۴۰۰ \times ۱۰^{-۶} \mathrm{m}^۲ \quad , \quad A_۳ = A_۴ = ۲۵۰ \times ۱۰^{-۶} \mathrm{m}^۲$$

$$L_۱ = L_۲ = L_۳ = L_۴ = ۰{,}۱۵۰ \ \mathrm{m}$$

مقادیر مذکور را در معادلهٔ (۲-۸) قرار می‌دهیم. نتیجه می‌شود:

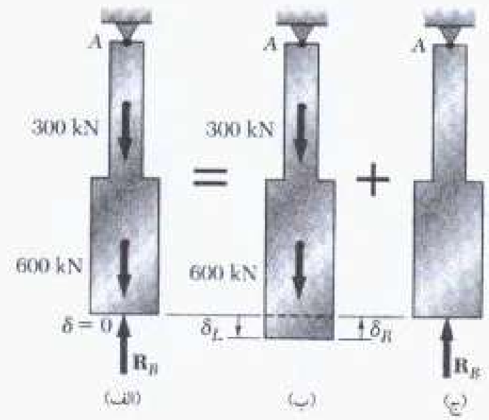
$$\delta_L = \sum_{i=۱}^{۴} \frac{P_i L_i}{A_i E} = \left(۰ + \frac{۶۰۰ \times ۱۰^۳ \mathrm{N}}{۴۰۰ \times ۱۰^{-۶} \mathrm{m}^۲} + \frac{۶۰۰ \times ۱۰^۳ \mathrm{N}}{۲۵۰ \times ۱۰^{-۶} \mathrm{m}^۲} + \frac{۹۰۰ \times ۱۰^۳ \mathrm{N}}{۲۵۰ \times ۱۰^{-۶} \mathrm{m}^۲} \right) \frac{۰{,}۱۵۰ \mathrm{m}}{E}$$

$$\Rightarrow \delta_L = \frac{۱{,}۱۲۵ \times ۱۰^۹}{E} \qquad (۲\text{-}۱۷)$$

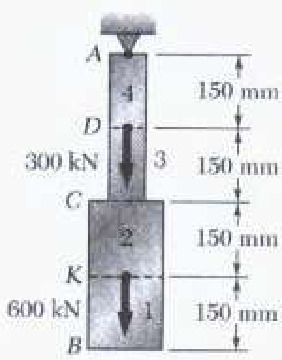
مقادیر مذکور را در معادلهٔ (۲-۸) قرار می‌دهیم. نتیجه می‌شود:

$$\delta_L = \sum_{i=۱}^{۴} \frac{P_i L_i}{A_i E} = \left(۰ + \frac{۶۰۰ \times ۱۰^۳ \mathrm{N}}{۴۰۰ \times ۱۰^{-۶} \mathrm{m}^۲} + \frac{۶۰۰ \times ۱۰^۳ \mathrm{N}}{۲۵۰ \times ۱۰^{-۶} \mathrm{m}^۲} + \frac{۹۰۰ \times ۱۰^۳ \mathrm{N}}{۲۵۰ \times ۱۰^{-۶} \mathrm{m}^۲} \right) \frac{۰{,}۱۵۰ \mathrm{m}}{E}$$

$$\Rightarrow \delta_L = \frac{۱{,}۱۲۵ \times ۱۰^۹}{E} \qquad (۲\text{-}۱۷)$$



شکل ۲-۲۹



شکل ۲-۳۰

اکنون، تغییر طول ناشی از واکنش زائد R_B را می‌یابیم. برای این منظور، طبق شکل ۲-۳۱، میله را به دو قسمت تقسیم کرده و می‌نویسیم:

$$P_1 = P_2 = -R_B$$

$$A_1 = 400 \times 10^{-6}\ \mathrm{m^2} \quad , \quad A_2 = 250 \times 10^{-6}\ \mathrm{m^2}$$

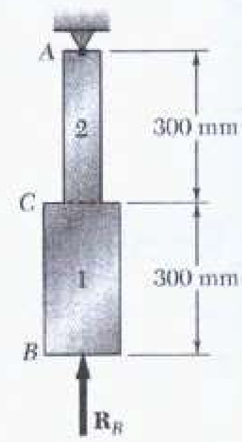
$$L_1 = L_2 = 0.300\ \mathrm{m}$$

مقادیر مذکور را در معادلهٔ (۲-۸) قرار می‌دهیم. نتیجه می‌شود:

$$\delta_R = \frac{P_1 L_1}{A_1 E} + \frac{P_2 L_2}{A_2 E} = -\frac{(1.95 \times 10^3) R_B}{E} \qquad (۲\text{-}۱۸)$$

با توجه به وضعیت هندسی میله، می‌نویسیم:

$$\delta = \delta_L + \delta_R = 0 \qquad (۲\text{-}۱۹)$$



شکل ۲-۳۱

از معادله‌های (۲-۱۷)، (۲-۱۸) و (۲-۱۹)، نتیجه می‌شود:

$$\delta = \frac{1.125 \times 10^9}{E} - \frac{(1.95 \times 10^3) R_B}{E} = 0$$

$$\Rightarrow R_B = 577 \times 10^3\ \mathrm{N} = 577\ \mathrm{kN} \quad \blacktriangleleft$$

برای تعیین واکنش R_A در تکیه‌گاه بالایی، نمودار آزاد میله را بررسی می‌کنیم (شکل ۲-۳۲)، و معادلهٔ تعادل را برای آن می‌نویسیم:

$$+\uparrow \sum F_y = 0: \quad R_A - 300\ \mathrm{kN} - 600\ \mathrm{kN} + R_B = 0$$

$$\Rightarrow R_A = 900\ \mathrm{kN} - R_B = 900\ \mathrm{kN} - 577\ \mathrm{kN} = 323\ \mathrm{kN} \quad \blacktriangleleft$$

توجه: پس از تعیین واکنش‌ها، تنش و کرنش برای میله را می‌توان تعیین کرد. گفتنی است که گرچه تغییر طول کلی میله صفر است، اما هر یک از قسمت‌های آن (براثر بارگذاری و قیود میله) تغییر طول می‌دهند.

شکل ۲-۳۲

مثال ۲-۵

در مثال ۲-۰۴، واکنش در تکیه‌گاه‌های A و B را با این فرض بیابید که، قبل از بارگذاری، فاصله ۴٫۵۰ mm بین میله و زمین وجود داشته باشد (شکل ۲-۳۳). مدول الاستیسیتهٔ میله را ۲۰۰ GPa (۲۰۰×۱۰^{۹} Pa) درنظر بگیرید.

حل: در مثال ۲-۰۴، تغییر طول کلی میله صفر بود ($\delta = ۰$). اما، در اینجا، $\delta = ۴٫۵$ mm. بنابراین، می‌نویسیم:

$$\delta = \delta_L + \delta_R = ۴٫۵ \times ۱۰^{-۳}\,\mathrm{m} \qquad (۲۰-۲)$$

از معادله‌های (۲-۱۷)، (۲-۱۸) و (۲-۲۰)، نتیجه می‌شود:

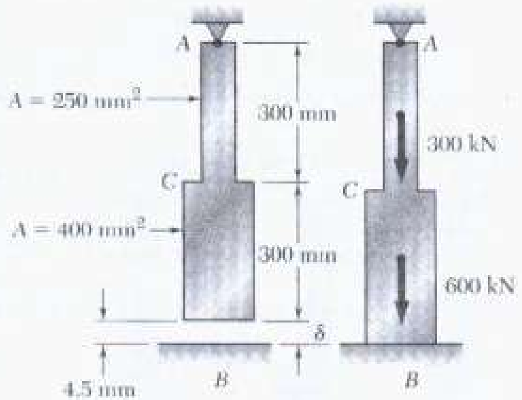
$$\delta = \frac{۱٫۱۲۵ \times ۱۰^{۹}}{۲۰۰ \times ۱۰^{۹}} - \frac{(۱٫۹۵ \times ۱۰^{۳})R_B}{۲۰۰ \times ۱۰^{۹}} = ۴٫۵ \times ۱۰^{-۳}\,\mathrm{m}$$

$$\Rightarrow \quad R_B = ۱۱۵٫۴ \times ۱۰^{۳}\,\mathrm{N} = ۱۱۵٫۴\,\mathrm{kN} \quad ◀$$

برای نمودار آزاد میله در شکل ۲-۳۲، ۳، می‌نویسیم:

$$+\uparrow \sum F_y = ۰: \qquad R_A - ۳۰۰\,\mathrm{kN} - ۶۰۰\,\mathrm{kN} + R_B = ۰$$

$$\Rightarrow R_A = ۹۰۰\,\mathrm{kN} - R_B = ۹۰۰\,\mathrm{kN} - ۱۱۵٫۴\,\mathrm{kN} = ۷۸۵\,\mathrm{kN} \quad ◀$$



شکل ۲-۳۳

۲-۱۰ مسائل تغییر دما

تاکنون، سازه‌ها با دمای ثابت را بررسی کرده‌ایم. اکنون، سازه‌ها با دمای متغیر را تحلیل می‌کنیم.

میله همگن AB، با مقطع عرضی یکنواخت، را درنظر می‌گیریم. این میله بر روی یک سطح صاف افقی قرار دارد (شکل ۲-۳۴ الف). اگر دمای میله به اندازهٔ ΔT افزایش یابد، خواهیم داشت (شکل ۲-۳۴ ب):

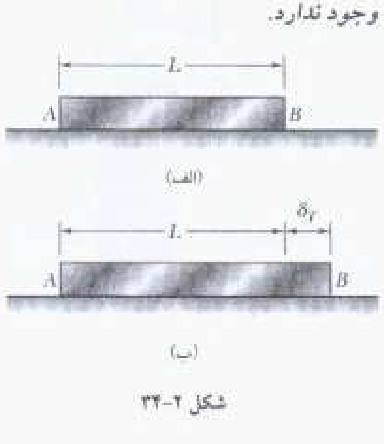
$$\boxed{\delta_T = \alpha(\Delta T)L} \qquad (۲۱-۲)$$

δ_T تغییر طول میله، و α **ضریب انبساط گرمایی** است. واحد این ضریب، $\frac{۱}{°C}$ یا $\frac{۱}{°F}$ است. (°C و °F، به‌ترتیب، دما برحسب درجه سانتیگراد و فارنهایت هستند).

کرنش حاصل از σ_T چنین است: $\varepsilon_T = \delta_T / L$. با توجه به معادله (۲-۲۱)،

$$\boxed{\varepsilon_T = \alpha \Delta T} \qquad (۲۲-۲)$$

ε_T را **کرنش گرمایی** می‌گویند، زیرا از تغییر دما ناشی می‌شود. در این بررسی، فعلاً فرض می‌کنیم **هیچ تنشی وابسته به کرنش ε_T وجود ندارد**.



شکل ۲-۳۴

$$P = P_a + P_b$$

$$\delta_a = \delta_b = -0.4\ mm = \delta$$

$$P = \left(\frac{E_a A_a + E_b A_b}{L}\right)\delta$$

$$A_a = \frac{\pi}{4}(60^2 - 25^2) = 2336.6\ mm^2$$

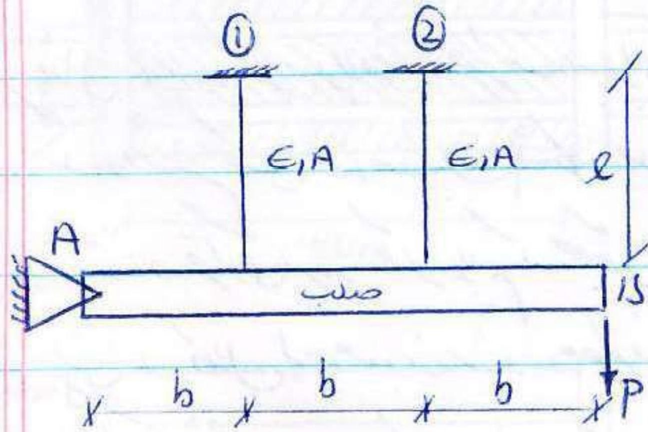
$$L = 300\ mm$$

$$A_b = \frac{\pi}{4}(25)^2 = 490.9\ mm^2$$

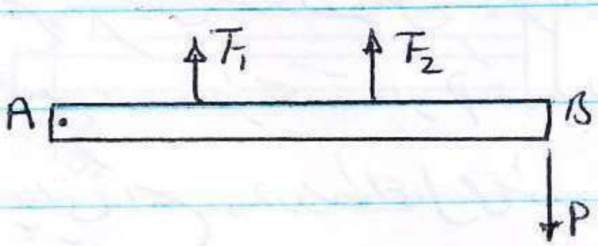
$$\Longrightarrow P = -287\ kN$$

$$\sigma_b = \frac{P_b}{A_b} = \frac{\frac{E_b \cdot \cancel{A_b} \cdot \delta}{L}}{\cancel{A_b}} = \frac{105\times 10^3 \times (-0.04)}{300} = 0.14\ Gpa$$

مثال ۵ : از عضو افقی AB را صلب فرض کنیم تنش های بوجود آمده در کابل های ① و ② چقدر است



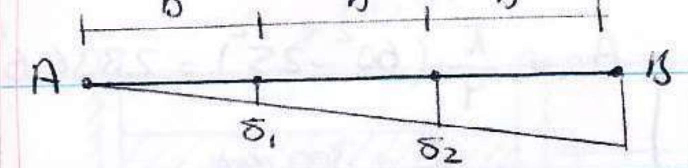
چون عضو صلب است پس تغییر شکل ندارد.



$$\sum M_A = 0 \rightarrow$$

$$F_1 \times b + F_2(2b) - P(3b) = 0$$

$$\rightarrow F_1 + 2F_2 = 3P \quad (I)$$

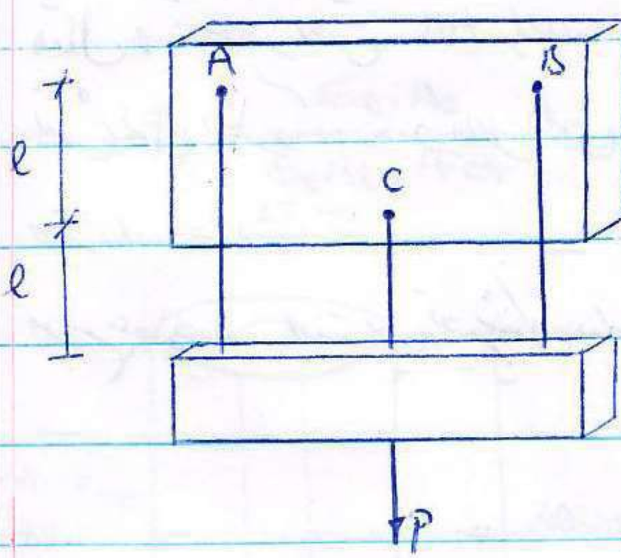


$$\delta_1 = \frac{1}{2}\delta_2$$

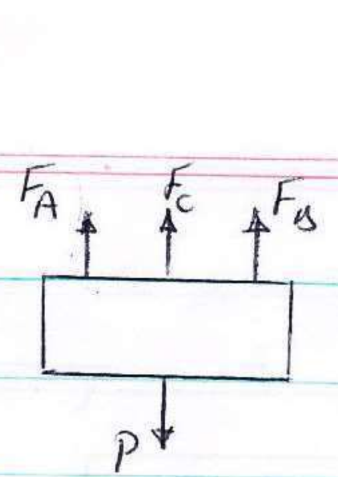
$$\Rightarrow \frac{F_1 L}{EA} = \frac{F_2 L}{2EA} \rightarrow F_2 = 2F_1 \quad (\mathrm{II})$$

$$\mathrm{I}, \mathrm{II} \Rightarrow 5F_1 = 3P \Rightarrow F_1 = \frac{3}{5}P \quad , \quad F_2 = \frac{6P}{5}$$

$$\Rightarrow \sigma_1 = \frac{3P}{5A} \qquad \sigma_2 = \frac{6P}{5A}$$



مثال 6 سه کابل فولادی با قطر مشابه برای نگه داشتن یک صفحه مطابق شکل مورد استفاده قرار می‌گیرند. اگر بدانیم که هیچگونه لقی در کابل‌ها موجود نباشد، مطلوبست نیروهای کششی موجود در کابل‌ها هنگامی که صفحه مورد نظر تحت بار P که به لبه پایینی آن و در وسط اعمال می‌شود.

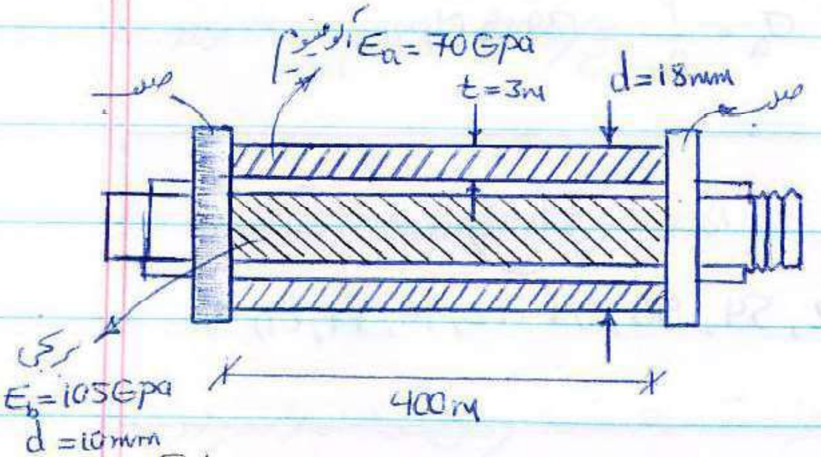


$$F_A + F_B + F_C = P \qquad (\Sigma F_y = 0)$$

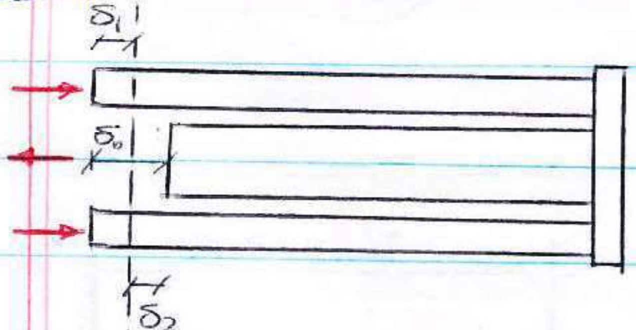
$$F_A = F_B \qquad (\Sigma M = 0)$$

$$\delta_A = \delta_B = \delta_C \Rightarrow \frac{F_A(2L)}{EA} = \frac{F_C \cdot L}{EA} \Rightarrow F_C = 2F_A = 2F_B$$

$$F_A + F_A + 2F_A = P \Rightarrow F_A = P/4 \,,\; F_B = P/4 \,,\; F_C = P/2$$



مثال 6 اگر طول حرکت مهره 2mm باشد و مهره اندازه 1/4 دور پیچ را بچرخانیم مطلوبست تنش نرمال ایجاد شده در Bolt برنجی و تیوب آلومینیومی.



فرض کنیم صفحه صلب باشد.

$$\delta_0 = \frac{1}{4}(2mm) = 0.5\,mm$$

δ_1 ← فشرده شدن آلومینیوم (لوله)

δ_2 ← کشیده شدن Bolt برنجی

$$\delta_1 + \delta_2 = \delta_0 = 0.5\,mm$$

رابطه سازگاری تغییر شکل

$$P_a = P_b = P$$

(تیوب) آلمنیوم $\delta_1 = \dfrac{P_a \cdot L}{A_a E_a} = \dfrac{P_a \cdot L}{70\times10^3 \times \frac{\pi}{4}(18^2-12^2)}$

$$\Rightarrow P_a = P_b = 5.62\,kN$$

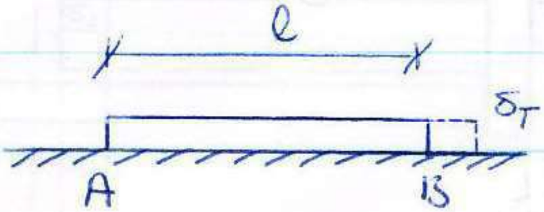
$$\delta_2 = \frac{P_b L}{A_b E_b} = \frac{P_b \cdot L}{105\times10^3 \times \frac{\pi}{4}(10)^2}$$

$\sigma_b = \dfrac{P}{A_b} = 71.6\,Mpa$ $\qquad\qquad$ $\sigma_a = \dfrac{P}{A_a} = 39.8\,Mpa$

سؤالات پیشنهادی Beer-johnston

فصل ۲ : 13, 14, 26, 30, 43, 52, 54, 56, 64, 72, 76, 77, 84, 88
96, 102, 112, 118

مسائل مربوط به بارگذاری حرارتی (نامعین):



α: ضریب انبساط حرارتی

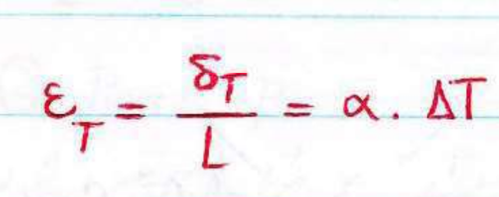
ΔT: اختلاف دما

$$\delta_T = \alpha . L . \Delta T \longrightarrow \delta_T = \int_0^L \alpha . T_{(x)} . dx$$

$$\text{فولاد}\quad \alpha_{steel} = 12 \times 10^{-6}\ 1/^{\circ}C$$

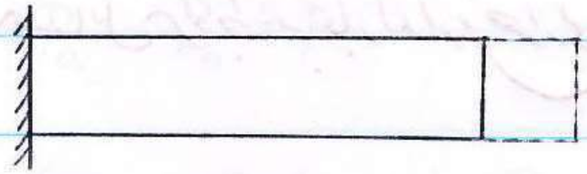
$$\varepsilon_T = \frac{\delta_T}{L} = \alpha . \Delta T$$

* در مسائل معین استاتیکی افزایش یا کاهش حرارت باعث تنش نمی‌شود بنابراین در مقاومت مصالح بررسی نمی‌شود.

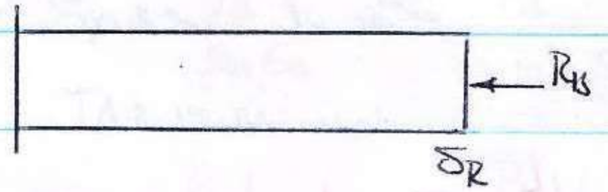


مثال: عضو مقابل دارای مشخصات مشخص می‌باشد. تعیین کنید تنش نرمال ایجاد شده در تیر بر اثر افزایش ΔT دما.

سازه یک درجه نامعین است .



$$\delta_T = \alpha \cdot L \cdot \Delta T$$



$$\delta_R = \frac{R_B \cdot L}{EA}$$

رابطه سازگاری تغییر شکل : $\delta_T = \delta_R \Rightarrow \alpha \cdot \cancel{L} \cdot \Delta T = \frac{R_B \cdot \cancel{L}}{AE} \Rightarrow R_B = \alpha \Delta T A E$

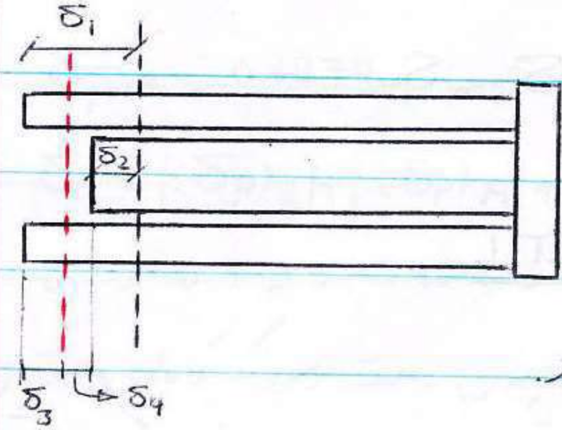
$$\Rightarrow \sigma_B = E \alpha \Delta T$$

راه دوم : رابطه هوک ←

$$\sigma = E \cdot \varepsilon_T = E \alpha \cdot \Delta T$$

مثال : تنش ایجاد شده در Bolt و پوسته براثر اعمال حرارت ΔT را بدست آورید. تغییر طول را نیز بدست آورید.

فرض می‌کنیم $\alpha_T > \alpha_b$. * اگر $\alpha_T = \alpha_b$ باشد تنشی ایجاد نمی‌شود.



هم صلب نسبت چپ را برای داریم.
موقعیت نهایی صفحه صلب در آزمایش
مخصوص قرار است.
در این حالت پوسته فشرده می‌شود و Bolt کشیده می‌شود.

رابطه سازگاری تغییر شکل : $\overset{\text{پوسته}}{\delta_1} - \delta_3 = \overset{\text{بولت (Bolt)}}{\delta_2} + \delta_4$ ①

$$\begin{cases} \delta_1 = \alpha_T \cdot L \cdot \Delta T \\ \delta_2 = \alpha_b \cdot L \, \Delta T \end{cases}$$

② $P_b = P_t = P$

برای δ_3 و δ_4 : تغییر طول را به علت کوچک بودن در نظر نمی‌گیریم و طول را همان l در نظر می‌گیریم. (به جای $l+\delta_2$)

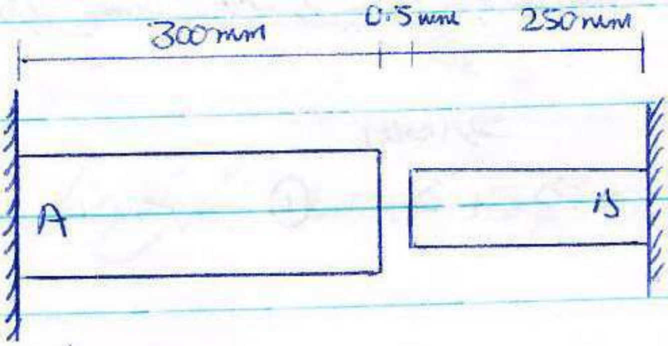
$$\delta_3 = \frac{P.L}{E_T . A_T} \qquad \delta_4 = \frac{P.L}{E_b \cdot A_b}$$

$$①,② \Longrightarrow \alpha_T \cdot L \cdot \Delta T - \frac{P.L}{E_T A_T} = \alpha_b L \, \Delta T + \frac{PL}{E_b A_b}$$

$$\Longrightarrow P = \frac{(\alpha_T - \alpha_b) \cdot \Delta T}{\frac{1}{E_T A_T} + \frac{1}{E_b A_b}}$$

تغییر شکل نهایی $\delta = \delta_1 - \delta_2 = \delta_3 + \delta_4$

$$\Rightarrow \delta = \frac{(\alpha_T E_T A_T + \alpha_b E_b A_b)\,\Delta T \cdot L}{E_T A_T + E_b A_b}$$



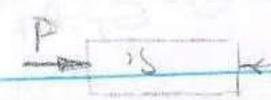
مثال 6: اگر بدانیم در ابتدا دمای اولیه بار و $20^\circ C$ باشد، محاسبه کنید درجه دمای تنش زا در عضو فولادی به میزان $\sigma = -150\,MPa$ خواهد رسید؟ در این دما طول دقیق عضو فولادی را حساب کنید.

$\underline{A}$: آلومینیوم: $A = 2000\,mm^2$, $E = 70\,GPa$, $\alpha = 23 \times 10^{-6} /^\circ C$

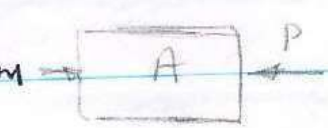
$\underline{B}$: فولاد: $A = 800\,mm^2$, $E = 190\,GPa$, $\alpha = 18 \times 10^{-6} /^\circ C$

نیرو $P = \sigma A_B = -150\,(800) = -120\,kN$

$$(\delta_P)_B = \frac{P \cdot L}{E \cdot A} = \frac{-120 \times 10^3 \times 250}{190 \times 10^3 \times 800} = -0.1974\,mm$$



$$(\delta_P)_A = \frac{P \cdot L}{E \cdot A} = \frac{-120 \times 10^3 \times 300}{70 \times 10^3 \times 2000} = -0.2571\,mm$$



$$\delta_P = -0.1974 + (-0.2571) = -0.4545 \text{ mm}$$

$$\delta_T = |(\delta_P)_B| + |(\delta_P)_A| + 0.5\text{mm} = |\delta_P| + 0.5\text{mm}$$

$$\delta_T = 0.5 + 0.4545 = 0.9545 \text{ mm}$$

تا 0.5mm کاملاً تغییر طول دیده می‌شود. از این جا به بعد تغییر طول به علت وجود تکیه‌گاه‌های راست و
چپ خودش را به شکل تنش و تولید نیرو نشان می‌دهد.

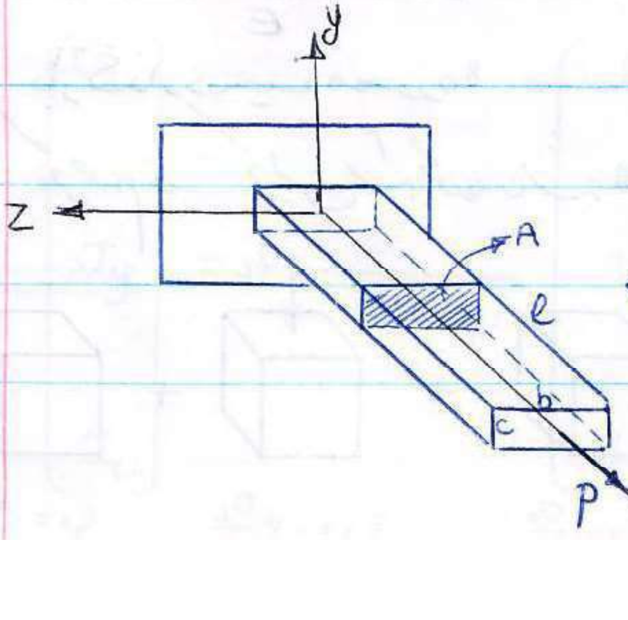
$$\delta_T = \sum \alpha_T . L . \Delta T = 18\times10^{-6} \times 250 \times \Delta T + 23\times10^{-6} \times 300 \times \Delta T = 0.9545$$

$$\Rightarrow \Delta T = 83.7^\circ$$

$$\rightarrow T = 20 + 83.7 = 103.7^\circ$$

$$\text{مقدار طول واقعی فولاد} = 250 + 18\times10^{-6}(250\times83.7) - 0.1974 = 250.179\text{ m}$$

ضریب پواسون 8



$$\begin{cases} \sigma_x = \dfrac{P}{A} \\ \sigma_y = 0 \\ \sigma_z = 0 \end{cases} \qquad \varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} = \frac{P}{EA}$$

اگر عضوی تحت کشش قرار گیرد ابعاد جانبی اش کوچک می شوند (c ، b)
ثابت می شود برای اجسام ایزوتروپ $\varepsilon_y = \varepsilon_z$ است.
وقتی تنش (اعمال نیرو) در راستای محور x ها باشد:

$$\nu = \left| \frac{\text{کرنش جانبی}}{\text{کرنش طولی}} \right| = \left| \frac{\varepsilon_y}{\varepsilon_x} \right| = \left| \frac{\varepsilon_z}{\varepsilon_x} \right|$$

$$\Longrightarrow \varepsilon_z = -\nu \cdot \varepsilon_x$$

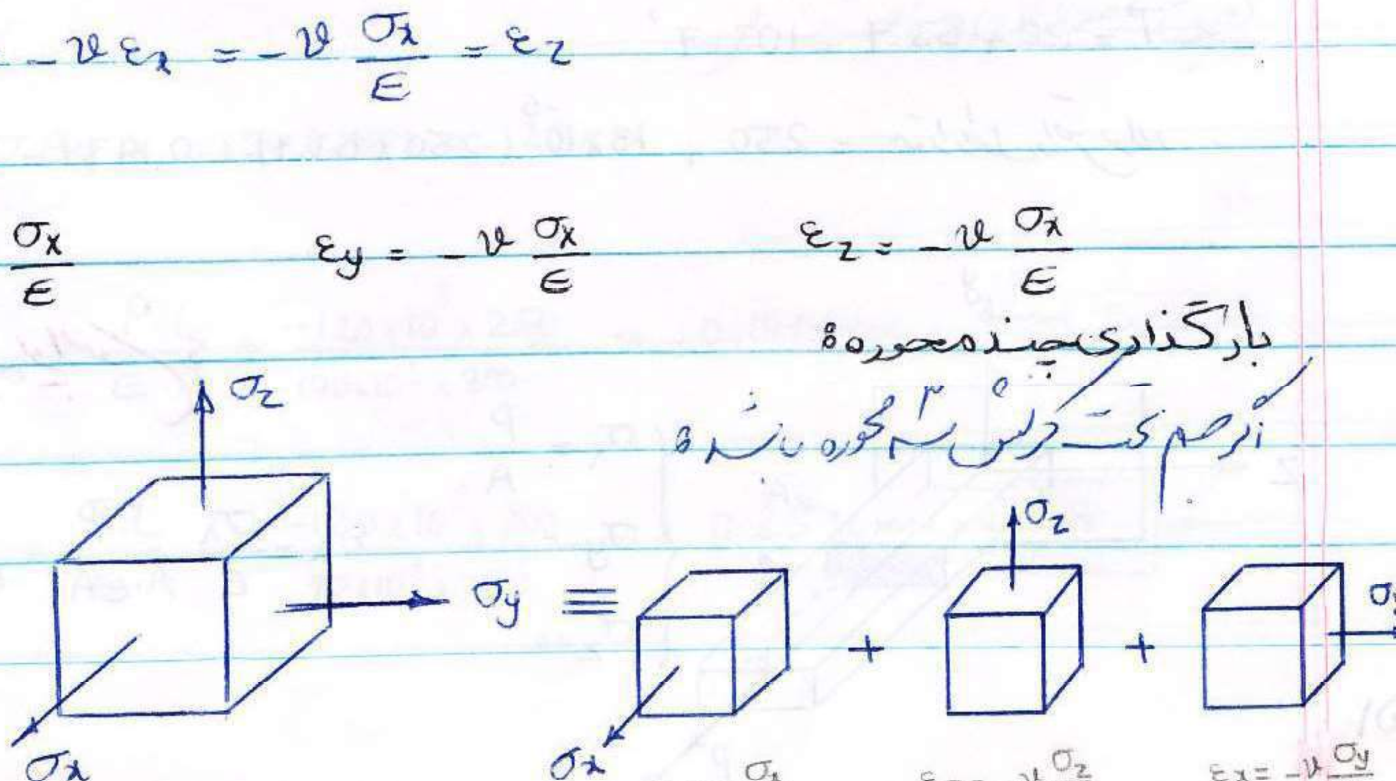
ε_z ، ε_y با ε_x مختلف العلامه هستند.

فولاد $\nu = 0.29 - 0.31$ بتن $\nu = 0.2 - 0.25$

$$\varepsilon_y = -\nu \varepsilon_x = -\nu \frac{\sigma_x}{E} = \varepsilon_z$$

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} \qquad \varepsilon_y = -\nu \frac{\sigma_x}{E} \qquad \varepsilon_z = -\nu \frac{\sigma_x}{E}$$

بارگذاری چند محوره:
اگر جسم تحت کرنش سه محوره باشد:



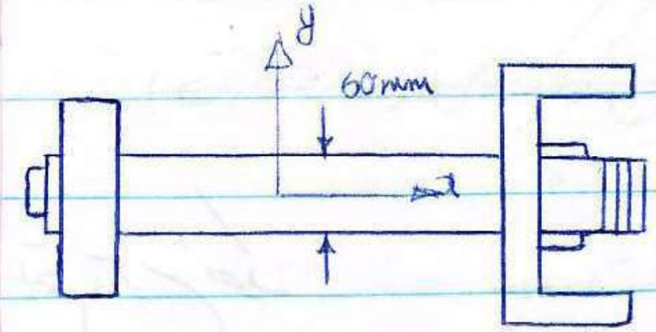
$\varepsilon_{1}x = \frac{\sigma_x}{E}$ $\varepsilon_{2}x = -\nu \frac{\sigma_z}{E}$ $\varepsilon_{3}x = -\nu \frac{\sigma_y}{E}$

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \dfrac{\sigma_x}{E} - \nu \cdot \dfrac{\sigma_y}{E} - \nu \cdot \dfrac{\sigma_z}{E} \\[2ex] \varepsilon_y = \dfrac{\sigma_y}{E} - \nu \dfrac{\sigma_x}{E} - \nu \dfrac{\sigma_z}{E} \\[2ex] \varepsilon_z = \dfrac{\sigma_z}{E} - \nu \dfrac{\sigma_x}{E} - \nu \dfrac{\sigma_y}{E} \end{cases} \longrightarrow$$

تعمیم قانون هوک

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{E} & -\dfrac{\nu}{E} & -\dfrac{\nu}{E} \\[2ex] -\dfrac{\nu}{E} & \dfrac{1}{E} & -\dfrac{\nu}{E} \\[2ex] \dfrac{-\nu}{E} & -\dfrac{\nu}{E} & \dfrac{1}{E} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \end{bmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu \\ \nu & 1-\nu & \nu \\ \nu & \nu & 1-\nu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \end{bmatrix}$$



مثال ۶: اگر در اثر محکم کردن مهره انتهایی قطر این Bolt را به اندازه 60.13 µm کم کند و نیروی کششی ایجاد شده در Bolt را محاسبه کنید.

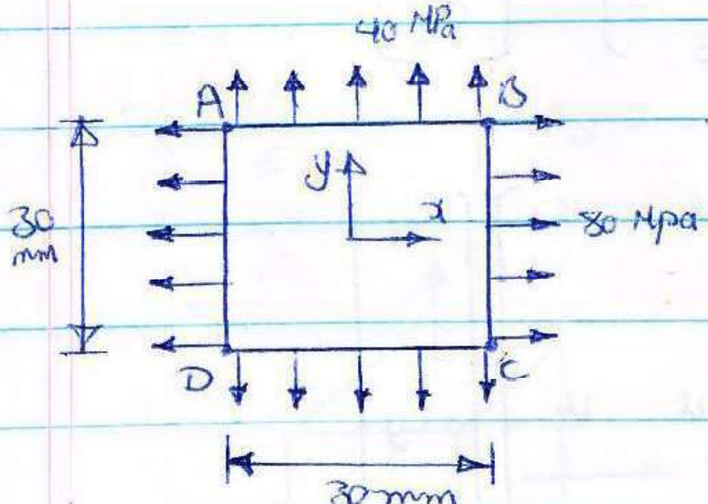
$E = 200\,GPa\ ,\quad \nu = 0.29$

$$\varepsilon_y = \frac{-0.13 \times 10^{-3}}{60} = -2.167 \times 10^{-6}$$

$$\varepsilon_y = -\nu \cdot \varepsilon_x \Rightarrow \varepsilon_x = \frac{216.7 \times 10^{-8}}{0.29} = \frac{\sigma_x}{E} = \frac{P}{A \cdot E}$$

$$\Rightarrow P = 74.724 \times 10^{-8} \times 200 \times 10^{9} \times 2.826 \times 10^{-3}$$

$$\Rightarrow P = 4.22\,KN$$



مثال ۷: صفحه مقابل تحت تنش دو محوره قرار دارد. مطلوبست تغییر در اندازه ضلع AB , BC و قطر AC.

$E = 200\,GPa$

$\nu = 0.3$

$\delta_x = \varepsilon_x \cdot \overline{AB}$ $\qquad\qquad$ $\delta_y = \varepsilon_y \cdot \overline{BC}$

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \nu \cdot \frac{\sigma_y}{E} = \frac{1}{200\times10^3}(80 - 0.3\times40) = 340\times10^{-6}$$

$$\varepsilon_y = \frac{\sigma_y}{E} - \nu\,\frac{\sigma_x}{E} = \frac{1}{200\times10^3}(40 - 0.3\times80) = 80\times10^{-6}$$

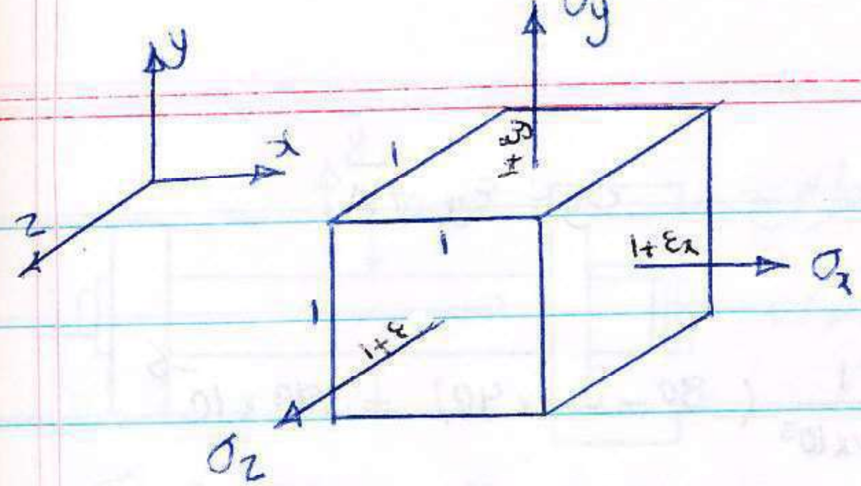
$$\begin{cases} \delta_{AB} = \varepsilon_x \cdot \overline{AB} = 340\times10^{-6}\times30 = +10.2\,\mu m \\ \delta_{BC} = \varepsilon_y \cdot \overline{BC} = 80\times10^{-6}\times30 = 2.4\,\mu m \end{cases}$$

$$AC^2 = (\overline{AB} + \delta_{AB})^2 + (\overline{BC} + \delta_{BC})^2$$

$$\Longrightarrow \delta_{AC} = 8.91\,\mu m$$

	σ_x ↙	↑ σ_z	→ σ_y
ε_x	$\frac{\sigma_x}{E}$	$-\nu\frac{\sigma_z}{E}$	$-\nu\frac{\sigma_y}{E}$
ε_y	$-\nu\frac{\sigma_x}{E}$	$-\nu\frac{\sigma_z}{E}$	$\frac{\sigma_y}{E}$
ε_z	$-\nu\frac{\sigma_x}{E}$	$\frac{\sigma_z}{E}$	$-\nu\frac{\sigma_y}{E}$

کرنش حجمی 8



$$\varepsilon = \frac{\delta}{L} \xrightarrow{L=1} \varepsilon = \delta$$

$$V_0 = 1 \times 1 \times 1$$

$$V = (1+\varepsilon_x)\cdot(1+\varepsilon_y)\cdot(1+\varepsilon_z) =$$

$$\Rightarrow V = 1 + \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z + \varepsilon_x\varepsilon_y + \varepsilon_y\varepsilon_z + \varepsilon_x\varepsilon_z + \varepsilon_x\varepsilon_y\varepsilon_z$$

$$\Rightarrow V \simeq 1 + \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$$

$$V_0 = abc \rightarrow \frac{V_0}{abc} = 1 \times 1 \times 1$$

$$V = (a+\delta_a)(b+\delta_b)(c+\delta_c) =$$
$$abc(1+\varepsilon_a)(1+\varepsilon_b)(1+\varepsilon_c)$$

$$e = \frac{V - V_0}{V_0} = \varepsilon_a + \varepsilon_b + \varepsilon_c$$

کرنش حجمی $e = \dfrac{V - V_0}{V_0}$

کرنش حجمی در تغییرهای حجم بسیار کم است. یعنی $e = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$

می‌توان کرنش حجمی را برحسب تنش نوشت:

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \frac{\nu}{E}(\sigma_y + \sigma_z)$$

$$e = \frac{\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z}{E} - \frac{2\nu(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)}{E}$$

$$\Rightarrow \quad e = \frac{(1-2\nu)(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)}{E}$$

حالت خاص: هرگاه جسم تحت فشار هیدرواستاتیک (آب) قرار گیرد:

$$\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = -P$$

$$\Rightarrow \quad e = \frac{-3(1-2\nu)P}{E}$$

ضریب P را با K نشان می‌دهند که به K مدول بالک گویند.

مدول بالک ضریبی است که در استحکام حجمی جسم در مقابل فشارهای هیدرواستاتیک مورد ارزیابی قرار می‌گیرد. این فرمول در علم مکانیک خاک مورد استفاده (فراوان) دارد.

$$e = \frac{-P}{K} \quad \Rightarrow \quad K = \frac{E}{3(1-2\nu)}$$

با توجه به اینکه در اثر فشار حجم کم شده و حجم رو به کاهش است این کرنش باید منفی باشد داریم:

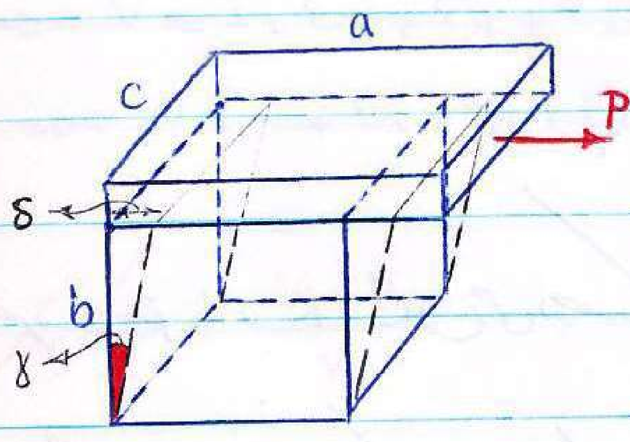
$$e<0 \longrightarrow k>0 \Rightarrow 1-2\nu>0$$

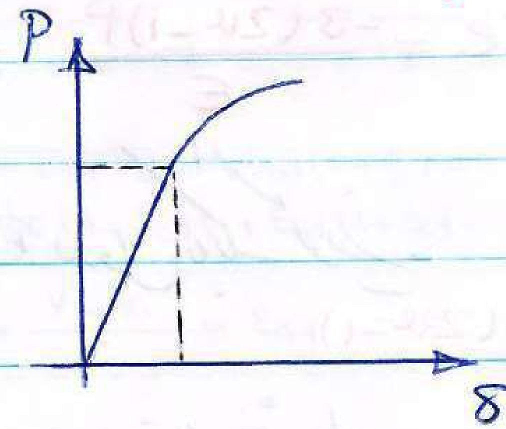
$$\Rightarrow 0<\nu<1/2 \Rightarrow \nu_{Max}=1/2$$

* ν طبق تعریف مثبت است.

$0<\nu<1/2$

کرنش برشی:





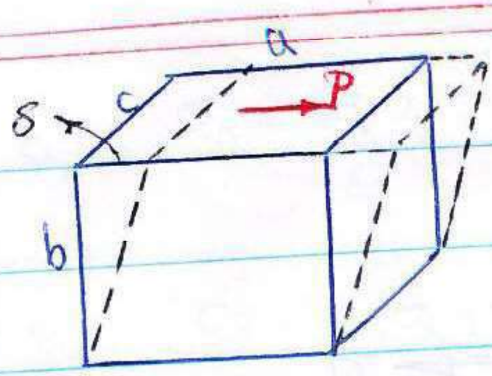
$$\gamma = tg^{-1}\left(\frac{\delta}{b}\right)$$

چون δ بسیار کوچک است پس:

$$\gamma = \frac{\delta}{b}$$

γ را کرنش برشی گویند و واحد ندارد. تنها کرنشی است که از جنس زاویه است.

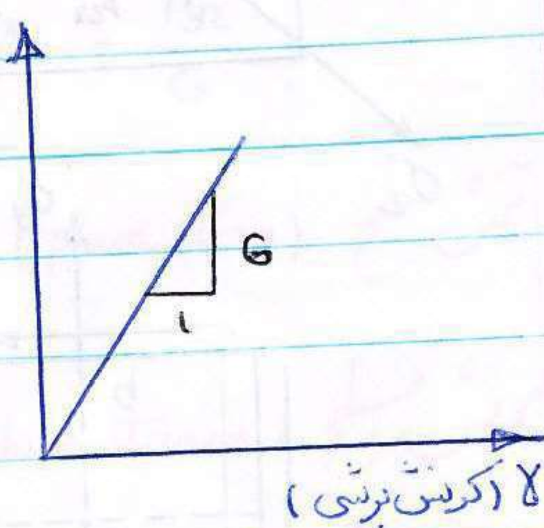
* $\tau = G\gamma$ را رابطه هوک برای تنش و کرنش برشی می نامند. ثابت G را مدول صلبیت یا مدول برشی ساده گویند.
$\frac{1}{3}E < G < \frac{1}{2}E$



جسم برشی:

δ را تغییر شکل برشی می گویند.

$$\tau_{\text{تنش برشی}} = \frac{P}{a \cdot c}$$



G: مدول ارتجاعی برشی

$\tau = G\gamma$ ← رابطه بین تنش برشی و کرنش برشی

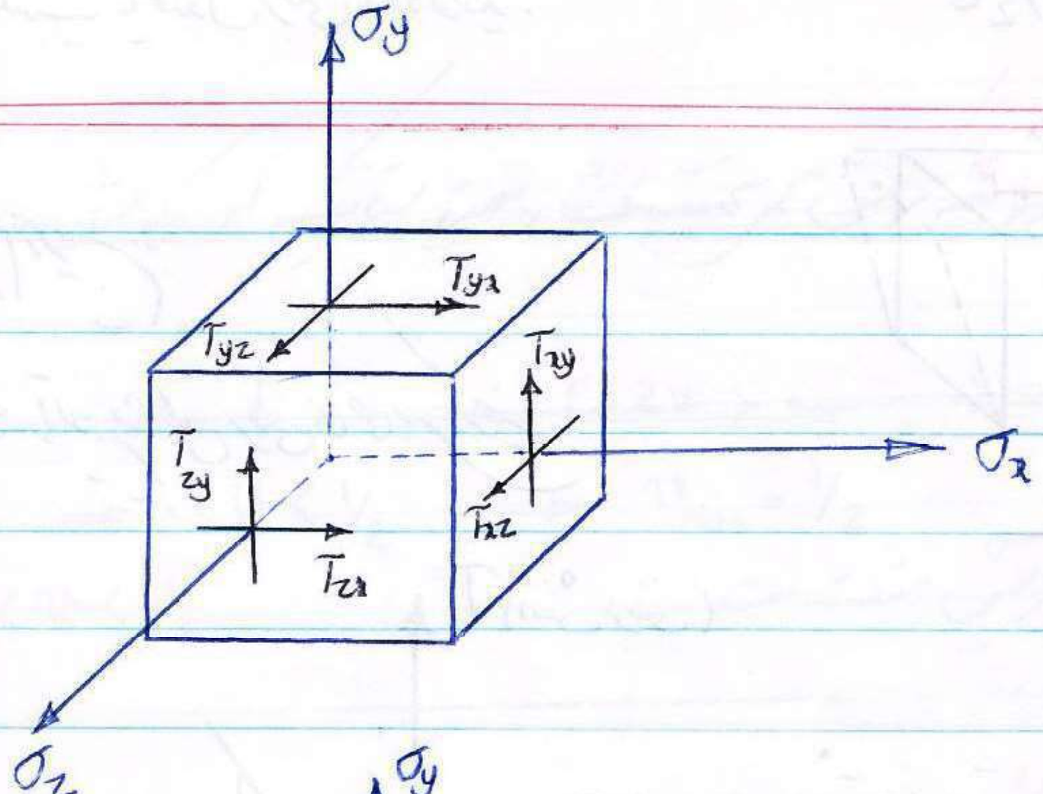
$$G = \frac{\tau}{\gamma} \quad (\tau = G\gamma)$$

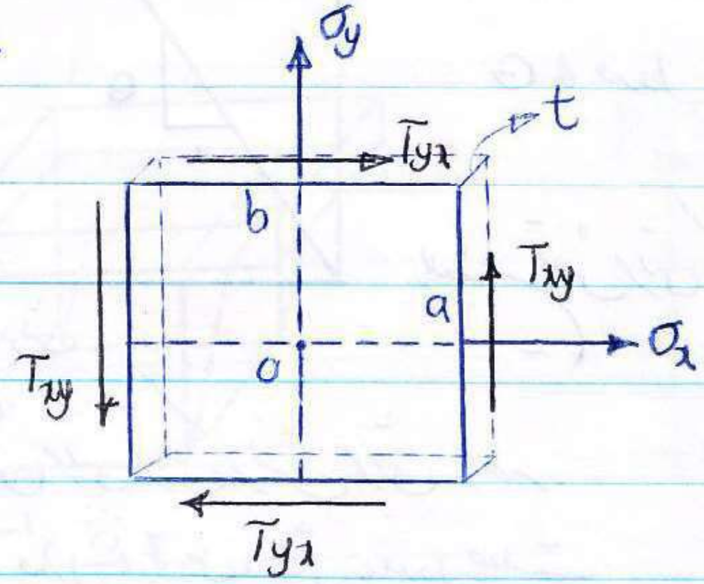
G: تنش برشی برای کرنش برشی واحد.
← مدول ارتجاعی در برشی یا مدول صلبیت

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

نکته: از نظر شماتیک منحنی $\tau-\gamma$ (1) هر یک از مصالح بسیار شبیه به منحنی $\sigma-\varepsilon$ (2) است ولی مقادیر منحنی (1) از منحنی (2) کمتر است.

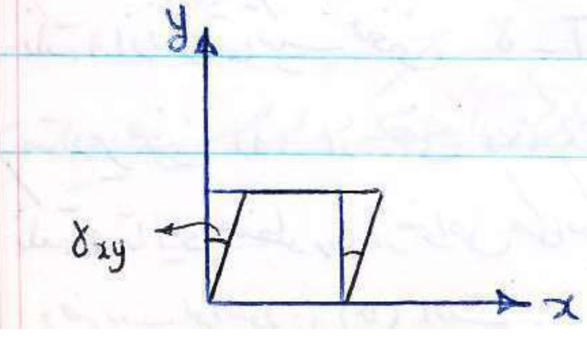
نکته: تا اینجا منظور ما از خواص مکانیکی مصالح، مدول الاستیسیته (E)، مدول ارتجاعی (G) و ضریب پواسون (ν) است.

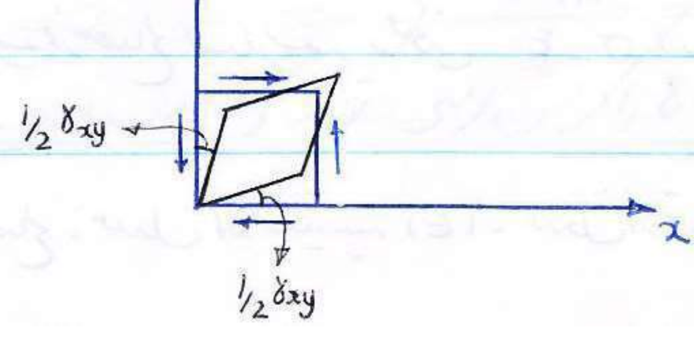




$$\Sigma M_O = 0 \implies \tau_{yx}(b.t)\, a = \tau_{xy}(a.t)\, b$$

$$\implies \tau_{yx} = \tau_{xy}$$





معادله‌های تعمیم قانون هوک:

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \dfrac{\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)}{E} \\[2ex] \varepsilon_y = \dfrac{\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)}{E} \\[2ex] \varepsilon_z = \dfrac{\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)}{E} \end{cases}$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G} \qquad \gamma_{xz} = \frac{\tau_{xz}}{G} \qquad \gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G}$$

تنش مسطح: (plane stress)

$$\sigma_z = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$$

کرنش مسطح: (plane strain)

$$\varepsilon_z = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$$

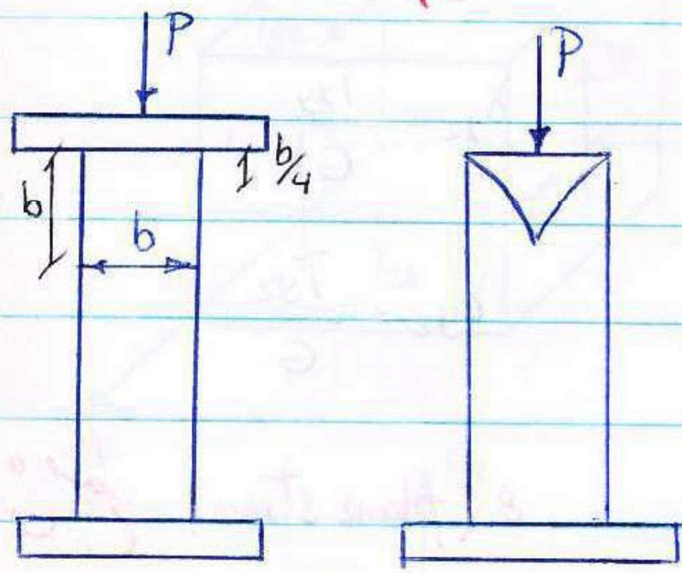
هر کرنش مسطح، تنش مسطح نیست و برعکس.

نکته: بررسی دقیق روابط بالا ما را به این باور هدایت می‌کند که اگر می‌خواهیم تغییرات به وجود آمده توسط ترکیبی دلخواه از تنش‌ها را در یک مادهٔ خاص پیش‌بینی کنیم، نخست باید سه ثابت متمایز E، ν، و G را به طور تجربی با آزمایش تعیین کنیم. در عمل فقط تعیین دو تا از سه ثابت برای هر ماده لازم است، زیرا:

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

تمرکز تنش:

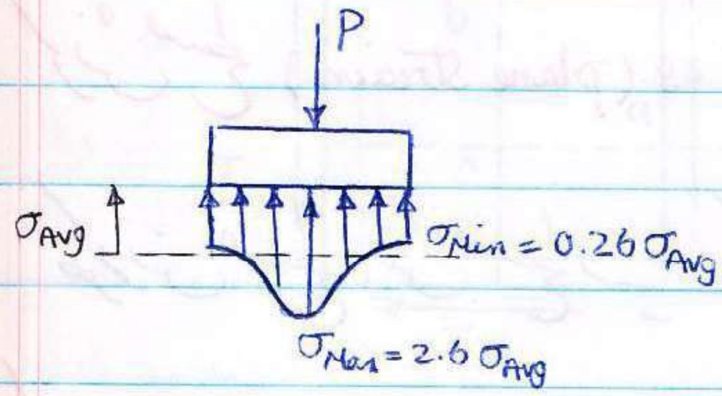
الف) اثر موضعی سن - ونان در محل تماس بار با جسم:



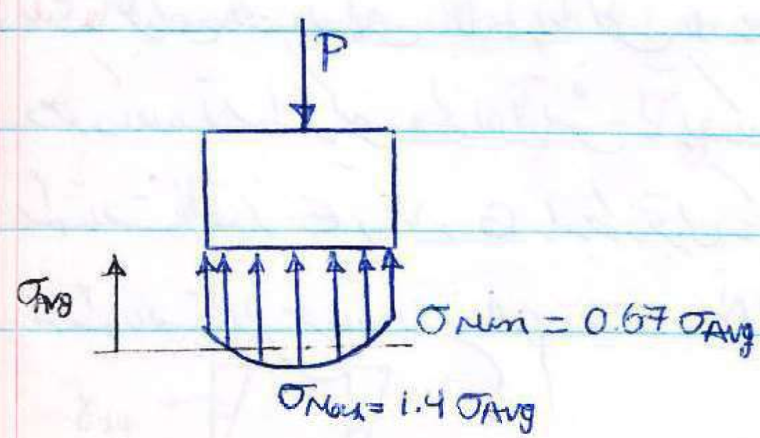
در b، b/2، b/4 برش زده:

$$\sigma_{Avg} = \frac{P}{A}$$

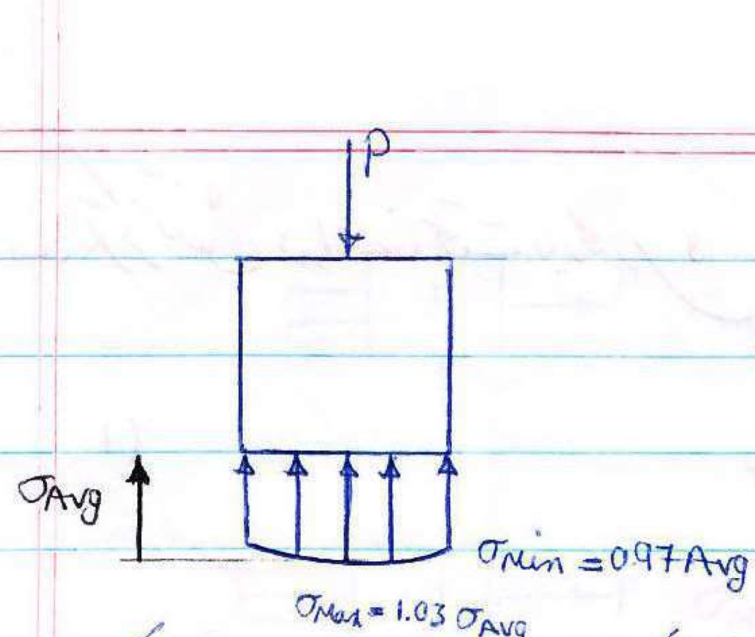
b/4:



b/2:



s b



* بنابراین بهتر است از اعمال نیروی واحد صرف‌نظر کنیم و در یک واسطه نیرو را اعمال کنیم. تا تنش Avg برای کل سطح ایجاد شود.

* در زندگی نکته بامزه‌ای است. اگر چیزهای متوسط را بپذیرید، اغلب اوقات بهترین‌ها نصیب شما می‌شود (سامرست موام)

این اصل (اصل سن ونان) می‌گوید که در توزیع مؤثر نیروی بر یک جسم در صورتیکه از نظر استاتیکی کاملاً یکسان باشند (اگر این دو مجموعه نیرو یکسان باشد) در بخش‌هایی از جسم که به اندازه کافی از نقطه اثر نیروها دور هستند (تقریباً به اندازه عرض مقطع) دارای تأثیر یکسان هستند.